Distributions tempérées

Caractérisation des distributions tempérées[2,3] — Les distributions tempérées de $\mathbb{R}^N$ sont exactement les distributions T de la forme :

$$T = \partial_x^\alpha \left((1 + \|x\|^2)^n f \right)$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^N$ est un multi-indice, n est un entier naturel et f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^N$, et où la dérivation s'entend au sens des distributions.

Définition d'une distribution tempérée, d'après Wikipédia.

1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

Conseils

- Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
- **Soignez la présentation** de votre copie.
- N'hésitez pas à poser des questions.
- Si vous avez fini en avance, relisez bien, ou préparez votre présentation pour l'entretien.
- N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

- Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
- Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
- Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
- Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe, sinon ça va barder.
- Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
- Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

2 Sujet

Introduction

Une épreuve régionale Prologin se compose usuellement d'une épreuve écrite, au cours de laquelle des candidats [1] s'assoient à des places dans un amphithéâtre gardé par de gentils organisateurs [2].

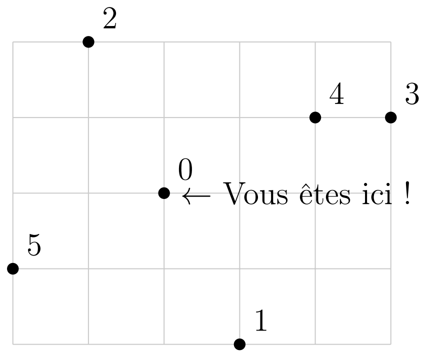


Figure 1 – Une configuration de l'amphithéâtre. 3 est en train de copier sur 4.

À neuf heures, les organisateurs procèdent à une distribution de sujets [3]. On considèrera le cas d'un seul organisateur distribuant les copies (ou d'autres objets) en se déplaçant à vol d'oiseau, et une distribution sera représentée par un chemin de candidat en candidat, formant une boucle et passant par chaque candidat une unique fois. Une distribution est dite *tempérée* lorsque la longueur totale de ce chemin est la plus petite possible.

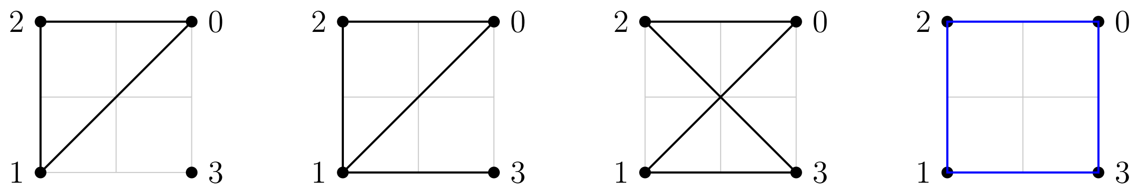
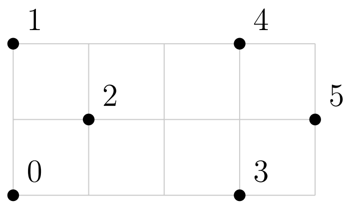


Figure 2 – Exemples de chemins partant du candidat nº 1. Les deux premiers ne sont pas des distributions (le premier ne passe pas par tous les candidats et le deuxième passe deux fois par 1), le troisième (1-3-2-0) est bien une distribution mais non tempérée car il existe un chemin plus court : le quatrième (1-3-0-2), qui est une distribution tempérée.

Question 1 (2 points)

> Tracer une distribution tempérée pour la configuration suivante, en précisant l'ordre des candidats visités.



1. Composés à 60 % d'eau et à 2 % de filles.
2. Composés à 60 % de filles et à 2 % d'eau.
3. Là, ça peut vous paraître méchant, mais c'est parce que vous n'avez pas encore passé votre entretien.

Question 2 (2 points)

> Partant des positions des n candidats de la salle au format (x_i, y_i) pour $0 \leqslant i < n$, écrire une fonction qui construit un tableau dont l'élément de la ligne i, colonne j représente la distance[4] entre les candidats i et j (où $0 \leqslant i, j < n$).

Question 3 (2 points)

> Écrire une fonction qui prend en argument un chemin sous la forme d'un tableau de nombres entre 0 et $n-1$ et détermine s'il s'agit d'une distribution, c'est-à-dire si le chemin passe par tous les candidats une et une seule fois.

Question 4 (2 points)

> Écrire une fonction qui prend en argument les positions des candidats et une distribution et calcule la distance que devra parcourir le pauvre organisateur effectuant cette distribution.

Un organisateur décide de distribuer des pains au chocolat en partant du candidat n° 0 et en choisissant à chaque étape de se déplacer vers le candidat non visité le plus proche (en cas d'égalité, il choisit celui de numéro minimal), jusqu'à revenir vers le candidat n° 0.

Question 5 (3 points)

> Tracer une configuration à 4 candidats pour laquelle le chemin de cet organisateur n'est pas une distribution tempérée. Vous tracerez sa distribution et une distribution strictement plus courte pour illustrer votre contre-exemple.

Les organisateurs décident de mettre en place un système de distribution automatique : des câbles sont tendus entre les candidats pour qu'ils puissent faire passer les objets à distribuer sans se lever. Par soucis d'économie, les organisateurs souhaitent utiliser le moins de câble possible tout en étant capable d'atteindre tous les candidats, on appellera longueur d'un système de distribution automatique la longueur de câble utilisée pour le construire.

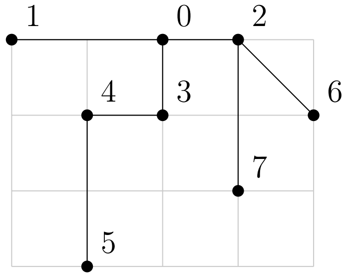


FIGURE 3 – Exemple d'un système de distribution automatique de longueur $9+\sqrt{2}$. Pour faire passer un pain au chocolat de 0 à 5, on utilise les câbles entre 0 et 3, entre 3 et 4, puis entre 4 et 5. Plus besoin de se lever !

4. On utilisera la distance euclidienne tout au long de ce sujet, la distance entre 4 et 2 est donc $\sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2}$.

Question 6 (3 points)

> Écrire une fonction qui prend en argument un système de distribution automatique et deux candidats et détermine la distance que va parcourir un objet envoyé d'un candidat à l'autre.

Question 7 (5 points)

> Décrire un algorithme en pseudo-code construisant un système de distribution automatique de longueur minimum à partir de la position des candidats dans la salle. Quelle est sa complexité ?

Question 8 (3 points)

> Montrer que la longueur d'une distribution tempérée est supérieure ou égale à la longueur d'un système de distribution automatique de longueur minimum.

Question 9 (5 points)

> À partir d'un système de distribution automatique de longueur minimum, montrer comment on peut construire une distribution dont la longueur totale est au plus égale au double de la longueur d'une distribution tempérée. *Indication : « faire le tour » d'un système de distribution automatique, à défaut d'être une distribution, est un bon point de départ.*

Question 10 (2 points)

> Votre algorithme est-il adaptable à la généralisation d'un graphe pondéré quelconque (où les distances entre candidats sont définies par un tableau et non par des positions de points du plan) ?

Vous pouvez attaquer les questions suivantes si et seulement si vous avez fait le tour des questions précédentes.

Question bonus 11 (3 points)

Est-il possible de résoudre la question 3 avec une complexité spatiale logarithmique ?

Question bonus 12 (4 points)

Écrire un algorithme qui trouve une distribution dont la longueur est au plus 3/2 de la longueur d'une distribution tempérée. *Indication : une méthode fait intervenir un couplage parfait de poids minimum.*

Question bonus 13 (1 000 000 dollars)

Donner un algorithme polynomial déterminant une distribution tempérée.

Le sujet est sur 29 points, et les questions bonus rapportent au total 7 points et 1 000 000 dollars, plus 1 point de présentation.